

**Florica Banu ▪ Ștefan Smărăndoiu ▪ Ioan Șerdean ▪ Petre Braica
Mircea Farcaș ▪ Gheorghe Iurea ▪ Gabriel Popa ▪ Adrian Zanoschi**

**Z. Blajovan ▪ C. Chiteș ▪ A. Cocoș ▪ G. Constantinescu
A. Dumitru ▪ K. Fekecs ▪ A. Ghioca ▪ N. Gruia ▪ R. Ilie ▪ D. Linț ▪ D. Matei
M. Moțățeanu ▪ V. Nechita ▪ R. Pop ▪ D. Popescu
E. Șchiopu. ▪ E. Sitaru ▪ Gh. Stoianovici ▪ I. Trifon ▪ S. Tudoran**

OLIMPIADELE DE MATEMATICĂ

**2003
CLASELE V-VI**

CUPRINS

(E = enunțuri, S = soluții)

	E	S
Argument	3	
CLASA a V-a		
I. Olimpiada națională de matematică: etapa locală	7	107
II. Olimpiada națională de matematică: etapa județeană	24	123
III. Concursuri interjudețene de matematică	41	139
CLASA a VI-a		
I. Olimpiada națională de matematică: etapa locală	51	147
II. Olimpiada națională de matematică: etapa județeană	73	165
III. Concursuri interjudețene de matematică	95	184

I. Olimpiada națională de matematică: etapa locală

ALBA

I. Fie $a = 1999 + 2(1 + 2 + \dots + 1998)$

$$b = 1 + 3 + 5 + \dots + 1999.$$

Arătați că a și b sunt pătrate perfecte.

II. a) Determinați mulțimile:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x < 13 \text{ și } x \mid 16\}.,$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 + 2x < 10 \text{ și } 2 \mid x\}.$$

b) Calculați $A \cap B, A - B$.

III. 1. Să se arate că numărul $s = 6^1 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{100}$ este divizibil cu 42.

2. Comparați numerele:

$$a = (2 + 8^{21} : 16^{15} + 6 \cdot 27^{10} : 81^7)^{63} \text{ și}$$

$$b = (2^{2^5} : 2^{5^2} + 1)^{54}.$$

IV. Tatăl are cu 2 ani mai puțin decât mama și fiul la un loc. Peste 4 ani vârsta mamei va fi de 3 ori mai mare decât vârsta fiului iar toți împreună vor avea 74 ani. Ce vârstă are fiecare în prezent ?

ARAD

I. Să se arate că orice putere a lui 25 se poate scrie ca sumă de 2 pătrate perfecte.

II. Să se determine cifrele x, a, b, c cu a, b, c consecutive, știind că $\overline{xa} \cdot \overline{ax} = \overline{cba}$

III. Într-o clasă sunt de 4 ori mai mulți băieți decât fete. Se formează o grupă compusă din 4 băieți și 4 fete, care, primind o sarcină specială, părăsesc clasa. Se constată că au mai rămas de 7 ori mai mulți băieți decât fete. Câți băieți și câte fete au fost la început ?

IV. Să se determine elementele mulțimilor A și B , fiind îndeplinite condițiile :

$$A \cap B = \{9, 3, 1\}$$

$$A \setminus B = \{2, 4, 11\}$$

$$B \setminus A = \{5, 7, 8\}.$$

ARGEȘ

- I. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$, scrise în baza 10, astfel încât

$$a + 2b + 3c = 24 - a^2.$$

Nicolae Vizuroiu

- II. Ce rest dau numerele naturale "n" la împărțirea cu 120 dacă împărțirile la 10 dau restul 6, împărțite la 15 dau restul 11 și împărțite la 8 dau restul 0?

Virginia Tică, Vasile Tică

- III. a) Să se arate că numărul $2003 \cdot 10^4$ se poate scrie ca sumă a 2003 numere naturale consecutive.

Gheorghe Molea

- b) Arătați că dacă n este un număr natural impar, atunci $A = 2^{n+3} \cdot 3^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 3^{n+3}$ poate fi scris ca sumă a două pătrate perfecte.

Angela Ion

- IV. Arătați că numărul $N = 2^{13} + 2^{23} + 2^{33} + 2^{43} + 2^{53} + \dots + 2^{1993} + 2^{2003}$, este divizibil cu 10^3 .

Cecilia Diaconescu

BACĂU

- I. Se consideră numerele:

$$a = 8^7 : 4^{10} + 2 \cdot 5^2 + 2^2 \cdot 7 + 10;$$

$$b = 27^9 : 9^{13} + 2^3 \cdot 5 + 2^2 \cdot 3^2 + 41;$$

- a) Să se determine a și b .
b) Să se determine la ce număr se împart a și b dacă se obțin resturile 10, respectiv 8.
c) Dacă împărțim un număr c la a se obține restul 56. Să se afle restul împărțirii numărului c la 15.
d) Să se afle suma numerelor de trei cifre care împărțite la b dau restul 37.

- II. Determinați numărul natural $\overline{abc}$ scris în baza zece știind că:

$$\overline{62abc} + \overline{6abc2} + \overline{2abc6} + \overline{abc62} = 235119.$$

- III. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$5x^2 + 15x + 21y^2 = 20032003.$$

BIHOR

- I. Găsiți două mulțimi A și B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
- mulțimea A are 4 elemente iar mulțimea B are 3 elemente;
 - elementele mulțimii A sunt numere naturale pare consecutive, iar elementele mulțimii B sunt numere naturale impare consecutive;
 - cel mai mare element al mulțimii A este cu 7 unități mai mare decât cel mai mic element al mulțimii B ;
 - suma elementelor mulțimii $A \cup B$ este 2003.

Szabo Gyongyi

- II. Scrieți numărul $\frac{2001^{10} - 1}{2000}$ ca o sumă de zece puteri cu aceeași bază.

Florin Nicoară

- III. Să se determine numărul numerelor naturale de 6 cifre, care prin împărțire la 2001 dau restul 1002.

Romulus Pleșa, Viorica Pleșa

BISTRIȚA-NĂSĂUD

- I. Aflați pătratul numărului x știind că este cuprins între 5 și 10 și verificați egalitatea:
- $$\{[x \cdot 8 - 60] : 14 + 6\} : 4 + 5 \cdot n + 13 = 40, n \in \mathbb{N}.$$
- II. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$, $B = \{y \in \mathbb{N}^+ \mid y = x - 2, x \in A\}$, $C = \{z \in \mathbb{N} \mid z = y^2 - 1, y \in B\}$.
- Calculați $(A - B) \cap C$.
 - Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției $\text{card}P(B) \leq 1102_{(2)}$.
- III. a) Scrieți numărul 2003 ca o sumă de puteri diferite ale lui 2.
b) Să se afle restul împărțirii numărului $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 100 + 2003$ la 1247.
- IV. Un săculeț conține bile roșii și albe, care cântăresc 100 grame. Fiecare bilă roșie cântărește 5 grame, iar fiecare bilă albă cântărește 7 grame. Câte bile sunt în săculeț?

I. a) Să se determine mulțimile A , B și C dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:

$$A \cap C = \{2; 4\};$$

$$A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 8; 16\};$$

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 6\};$$

$$B = \{y \mid y = 2k + 1, y < 8, k \in \mathbb{N}\}.$$

Mariana Băjan

b) Calculați: $\mathbb{N} \cap (C \setminus B)$, $(A \cup B) \cap (B \setminus \mathbb{N})$.

Dorina Mateiaș

II. Se dau numerele

$$x = [(2^3)^5 + 25^3 - 7^{35} : 7^{20}] : (2^{15} - 7^{15} + 5^6) \cdot 3$$

$$y = 2^{101} : [(5^{171} : 5^{170} - 3)^{98} + 2^{105} : (2^3 \cdot 2^4) + (2^{11})^9] \cdot 2.$$

a) Comparați x cu y ;

b) Determinați ultima cifră a numerelor x și y .

Elena Ciocan

III. Fie a și b două numere naturale nenule și $\overline{ab}$ numărul obținut prin alipirea numerelor a și b (de exemplu: dacă $a = 123$ și $b = 45$, atunci $\overline{ab} = 12345$). Să se demonstreze că:

a) dacă $a + b$ este divizibil cu 9, atunci $\overline{ab}$ este divizibil cu 9;

b) dacă $\overline{ab}$ este divizibil cu 9, atunci $a + b$ este divizibil cu 9.

Romeo Ilie

BRAILA

I. Să se calculeze suma: $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2003$ și să se determine numărul de termeni multipli de 7.

II. a) Să se compare numerele: $a = (8^{24} + 4^{36} + 2^{72})^{100} : 16^{1800}$ și $b = 32^{30}$.

b) Să se determine restul împărțirii numărului 32^{30} la numărul $2^{100} - 1$.

III. Se consideră numerele: $a = 10^{21}$ și $b = 10^{20}$.

a) Arătați că $a - b$ este pătrat perfect.

b) Arătați că fiecare număr se poate scrie ca o sumă de două numere naturale pătrate perfecte.

IV. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = k^2; k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = p^3; p \in \mathbb{N}\}$. Calculați suma primelor patru elemente din $A \cap B$ și determinați cel mai mic număr de cinci cifre din $A \cap B$.

I. Să se calculeze:

a) $(505 + 606 + 707) : (101 + 202 + 303)$;

b) $1001 \cdot (1002 - 1002 : 1002) : 1001^2$;

c) $(1^1 + 2^2 + 3^3)^2 : (1^3 + 2^2 + 3^1)^3 + 123^0$.

II. Suma a trei numere naturale consecutive este 3^{2003} . Aflați ultimele două cifre ale produsului celor trei numere.

III. Câte numere naturale de patru cifre se pot scrie cu ajutorul 2, 5 și 0 ? Câte dintre acestea sunt divizibile cu 2, dar nu și cu 5 ?

IV. Fie numerele de forma $n = \overline{xy287} + 13x$, unde x și y sunt cifre, $x \neq 0$. Aflați:

a) cea mai mare valoare a lui n ;

b) suma resturilor posibile și diferite ale împărțirii numerelor de forma n la 100.

BUZĂU

I. Avem la dispoziție un bazin prevăzut cu două robinete de umplere și patru de golire (identice). Dacă umplerea sau golirea unui bazin printr-un singur robinet durează o oră atunci:

a) Cât este timpul minim de umplere a bazinului ?

b) Cum putem proceda, ca timpul de golire a bazinului să fie de 45 minute.

II. Se dă numărul $n = 200320022001...4321$.

a) Câte cifre s-au folosit la scrierea lui ?

b) Aflați restul împărțirii numărului n la 16.

III. Se dau mulțimile:

$$A = \{x \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}, n \leq 3\} ;$$

$$B = \{y \mid y = x^2, x \in A\} ;$$

$$C = \{2^0, 2^6\} .$$

a) Determinați mulțimile A și B .

b) Calculați: $A \cup B, A \cap B, A \setminus C, C \setminus A, B \cap C$.

CARAȘ SEVERIN

I. Comparați numerele: $a = 2^{47} - 2^{45}$ și $b = 3^{31}$.

II. Arătați că numărul: $a = 15^{n+1} - 3^{n+1} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ este divizibil cu 17.

III. Fie mulțimile $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, x, 6\}$, $C = \{x, y, 4, 3\}$. Aflați numerele x și y știind că sunt îndeplinite condițiile:

a) $A \cap B = \{2, 5\}$;

b) $A \subset C$.

IV. Să se afle cel mai mic număr natural care împărțit la 24, 30, 36 dă restul 10, 16, respectiv 22.

CĂLĂRAȘI

- I. La următoarele trei întrebări dați răspunsul fără a-l justifica:
1. Florin are 132 de bile, iar Mihai numai 86. Câte bile trebuie să-i dea Florin lui Mihai pentru a avea un număr egal de bile ?
 2. Șase prieteni au mâncat împreună 20 de bomboane. Flavius a mâncat una, Andrei a mâncat două, Vasile trei și Daniela mai multe decât oricare dintre ceilalți. Care este numărul minim de bomboane pe care le-a mâncat Daniela ?
 3. Într-o clasă sunt 31 de elevi. Dintre oricare 20 de elevi din clasă, cel puțin 3 sunt băieți, Care este numărul minim de băieți din clasă ?
- II. Pentru ambalarea a 186 de creioane se folosesc 27 de cutii de 3 tipuri. Primul tip conține 14 bucăți, al doilea 6, iar ultimul 5. Câte cutii din fiecare tip s-au folosit ? Sunt mai multe soluții ? (justificați răspunsul).
- III. Suma tuturor resturilor împărțirii unor numere naturale consecutive la 11 este 7040. Câte numere au fost împărțite ?
- IV. Fie mulțimea $A \subset \mathbb{N}$, astfel încât: a) $2 \in A$; $5 \in A$; b) $x \in A \Rightarrow (3x+2) \in A$; c) $(7x-4) \in A \Rightarrow x \in A$. Arătați că:
- i) $\{8, 17, 10, 31\} \subset A$;
 - ii) $\{26, 53, 3, 12\} \subset A$.

Adi Latif

Viorica Stoianovici

Relu Ciupea

CLUJ

- I. Un caiet, trei creioane și cinci reviste costă 64000 lei, iar cinci caiete, patru creioane și trei reviste costă 56000 lei.
- a) Cât costă, la un loc, un caiet, un creion și o revistă ?
 - b) Cât costă, separat, un caiet, un creion și o revistă știind că prețurile lor, micșorate de 1000 de ori, sunt numere prime ?
- II. Determinați suma tuturor numerelor formate din trei cifre care împărțite la un număr format dintr-o singură cifră dau restul 8.
- III. a) Fie $n = 5 \cdot 2^{2003} + 3^{3302} + 21 \cdot 9^{1650} - 27 \cdot 3^{2998}$. Care este ultima cifră a numărului n ?
- b) Poate fi numărul $n = x^4 + 10y + 2$ pătrat perfect, $\forall x, y \in \mathbb{N}$? Justificați răspunsul.

Ioan Pop

Ioan Groza

Gheorghe Lobonț, Lucia Iepure